Глава 13

Элементарный покер: игра AKQ

Продолжаем изучение теории игр в покере. В этой главе мы рассмотрим, возможно, простейшую форму симметричного нетривиального покера. Впервые эта идея была представлена в статье Майка Каро для журнала Card Player. По всей видимости, он придумал такую игру, чтобы на наглядном примере изучить правильные соотношения ставок и блефов. К чести автора, она весьма неплохо справляется с этой задачей. Мы же, в свою очередь, вышли за рамки Лимитного покера, для которого изначально рассматривалась AKQ, и сделали несколько интересных открытий о Безлимитных играх. Однако для начала давайте рассмотрим игру в AKQ на половине улицы с ограничением по ставкам.

Перечислим основные характеристики этой игры:

- В колоде находятся всего три карты: A (туз), K (король), Q (дама).
- Каждому игроку раздается одна карта, без возможности обмена; оба игрока ставят обязательное анте.
- Затем следует один раунд ставок, после которого карты вскрываются (если никто из игроков не выбросил свою руку в пас). На вскрытии побеждает старшая карта.

Колода из трех карт заставляет задуматься о теме, которую мы ранее не рассматривали - **исключение карт**. В [0,1] игре у обоих участников были симметричные диапазоны, а рука одного игрока не влияла на руку его оппонента. Однако в этой игре, если у вас туз, то у оппонента могут оказаться только король или дама. Или если у вас дама, то у оппонента с равной вероятностью может оказаться король или туз.

Пример 13.1 – игра AKQ #1

Игра на половине улицы.

Размер банка равен двум единицам.

Ограничение на размер ставки – одна единица.

Вот как для данной игры выглядит платежная матрица для экс-шоудауна (для игрока Y):

	Игрок Y	Туз		Король		Дама	
Игрок X		Бет	Чек	Бет	Чек	Бет	Чек
Туз	Колл			-1	0	-1	0
	Фолд			+2	0	+2	0
Король	Колл	+1	0			-1	0
	Фолд	0	0			+2	0
Дама	Колл	+1	0	+1	0		
	Фолд	0	0	0	0		

Наша задача – найти оптимальные стратегии для этой игры. Мы сразу же можем упростить эту игру, исключив доминируемые стратегии. Сравнивая ситуации, когда у игрока X оказывается туз, легко увидеть, что колл всегда обладает равным или более высоким математическим ожиданием, чем фолд. Таким образом, стратегия фолда с тузом будет доминироваться стратегией колла. В результате мы можем исключить фолд с тузом из возможных стратегий для игрока X. Кроме того, можно заметить, что стратегия колла с дамой доминируется стратегией фолда. Так что мы можем исключить из возможных вариантов и колл с дамой. Теперь мы платежная матрица приняла вид:

	Игрок Y	Туз		Король		Дама	
Игрок X		Бет	Чек	Бет	Чек	Бет	Чек
Туз	Колл			-1	0	-1	0
Король	Колл	+1	0			-1	0
	Фолд	0	0			+2	0
Дама	Фолд	0	0	0	0		

Перейдем к доминируемым стратегиям для игрока Y. Как видно из таблицы выше, ставка с королем доминируется стратегией чека. Точно также мы можем сразу отбросить и чек с тузом. Таким образом, мы еще больше упростили первоначальную матрицу:

	Игрок Y	Туз	Дама	
Игрок X		Бет	Бет	Чек
Туз	Колл		-1	0
Король	Колл	+1	-1	0
	Фолд	0	+2	0

Теперь давайте превремся и еще раз посмотрим, как мы пришли к такому результату. Сначала мы разобрали стратегии для игрока X и нашли две ситуации, которые были как минимум не хуже своих противоположностей: колл с тузами и фолд с дамами. Надеюсь, что такой вывод достаточно очевиден – мы никогда не скидываем сильнейшую руку на ривере, и не отвечаем на ставку с абсолютно безнадежной рукой. Поскольку игрок X, будучи в здравом уме, тоже никогда бы не стал действовать в таком ключе, мы можем смело исключить эти стратегии из платежной матрицы.

Далее, мы взяли полученную матрицу и схожим образом оценили варианты для игрока Y. Если у него есть король, то он знает, что блеф против туза никогда не сработает, а дама у его оппонента никогда не сделает колл. В то же время, поставив с тузом, он точно никогда не проиграет, плюс он может получить колл от короля.

Исключив доминируемые стратегии, мы остаемся с куда более простой игрой. В сущности, со стратегической точки зрения это игра с матрицей 2x2 – мы уже разбирали ее аналоги в главе 11. Как и тогда, мы снова сталкиваемся с цикличными чистыми стратегиями.

Если игрок X всегда делает колл с королями, то лучшим вариантом для игрока Y будет полный отказ от блефов в пользу вэлью бетов. В свою очередь, в ответ на такую стратегию игрок X начнет сбрасывать всех своих королей. Затем игрок Y сможет воспользоваться этим, начав блефовать в каждой возможной ситуации. А игроку X ничего не останется кроме как вернуться к своей первоначальной стратегии колла со всеми королями. Это явно свидетельствует о том, что равновесие для рассматриваемых стратегий существует лишь в неких смешанных стратегиях.

Мы можем сформировать матрицу 2x2, определив математическое ожидание для недоминируемых стратегий при их перекрестном использовании.

Здесь два недоминируемых стратегических выбора – это должен ли игрок Y блефовать с дамами, а также стоит ли игроку X делать колл с королями.

Мы сможем найти ожидание игрока Y для каждого из случаев, если рассмотрим все руки, которые могут у него оказаться, а также все возможные исходы таких игр.

Определим четыре стратегических возможности:

Y_1 : Y блефует с дамами

Y_2 : Y делает чек с дамами

X_1 : X делает колл с королями

X_2 : X сбрасывает королей.

Мы можем найти математическое ожидание каждой из этих пар:

Y_1 против X_1:

Когда у игрока Y есть туз, он выигрывает ставку против королей игрока X, но ничего не получает от дам. Однако если у игрока Y на руках оказывается король, он не сделает ставку, а это значит, что в такой игре ставок не будет вообще. Когда же игрок Y получает даму, он блефует и проигрывает одну ставку королям или тузам игрока X.

Каждое из описанных событий происходит с вероятностью $^1/_6$; игрок Y выигрывает ставку лишь один раз, но проигрывает дважды. Таким образом:

$$< Y_1 , X_1 > = - {}^1/_6$$

Y_2 против X_2:

Когда у игрока Y есть туз, он выигрывает ставку против королей игрока X и ничего не получает от дам. Однако если у игрока Y на руках оказывается король, он не сделает ставку, а это значит, что в такой игре ставок не будет вообще. То же самое здесь относится и к случаю, когда игрок Y получает даму.

Игрок Y выиграет один раз, при этом ни разу не проиграв:

$$< Y_2 , X_1 > = + {}^1/_6$$

Υ_1 против X_2:

Когда у игрока Y есть туз, он никогда не выигрывает ставку у игрока X (он всегда скидывает свою карту в пас). Если игрок Y получает короля, он делает чек. Однако как только у игрока Y на руках оказывается дама, он блефует и выигрывает банк (две ставки) у короля, но проигрывает одну ставку, если у его оппонента есть туз.

Игрок Y выигрывает две ставки, проигрывает одну:

$$< Y_1 , X_2 > = + {}^1/_6$$

Υ_2 против. X_2:

Когда у игрока Y есть туз, он никогда не выигрывает ставку у игрока X (он всегда скидывает свою карту в пас). Если игрок Y получает короля, он делает чек. То же самое относится и к ситуации, когда у него оказывается дама. Таким образом, ни один из участников раздачи не выигрывает, но и не проигрывает:

$$< Y_2 , X_2 > = 0$$

В результате у нас образуется следующая матрица 2x2:

	Y ставит с дамами	**Y делает чек с дамами**
X делает колл с королями	$- {}^1/_6$	$+ {}^1/_6$
X скидывает королей	$+ {}^1/_6$	0

Умножение всех элементов платежной матрицы на положительную константу не изменит игру. Умножение на -1 просто поменяет местами выплаты между двумя игроками.

Если мы умножим матрицу игры AKQ #1 на -6, то получим:

	Y ставит с дамами	**Y делает чек с дамами**
X делает колл с королями	+1	-1
X скидывает королей	-1	0

Эта матрица должна быть знакома читателю по главе 10. Там она была обозначена как платежная матрица для «Полицейских и грабителей».

	Грабитель грабит	**Грабитель остается дома**
Полицейский патрулирует	+1	-1
Полицейский не патрулирует	-1	0

Таким образом, наша игра идентична «Полицейским и грабителям». Из анализа той игры мы знаем, что оптимальными стратегиями для участников являются $^{1}/_{3}$ and $^{1}/_{3}$. Ниже мы сможем сравнить этот результат с тем, который мы получим после вычислений.

Мы можем решить эту игру, найдя для каждого из игроков такую стратегию, при которой его оппонент станет безразличным к выбору одной из стратегических возможностей. Рассмотрим случай игрока Y, который должен решить, блефовать с дамой или нет. Его экс-шоудаун вэлью для двух действий, которые он может предпринять с дамой, будет следующим (здесь переменная «c» обозначает частоту колла с королем для игрока X):

<Y, блеф> = (проигрывает тузам) + (проигрывает королям) +
+ (короли делают фолд, он выигрывает банк)

<Y, блеф> = *p*(у X есть туз) (проигрывает одну ставку) +
+ *p*(у X есть король) *p*(X делает колл) (проигрывает одну ставку) +
+ *p(*у *X* есть король) *p*(X делает фолд) (банк)

<Y, блеф> = ($^{1}/_{2}$)(-1) + ($^{1}/_{2}$)(c)(-1) + ($^{1}/_{2}$)(1 – c) (2)

<Y, блеф> = $^{1}/_{2}$ (-1) + $^{1}/_{2}$ [c (-1) + (1 - c) (2)]

<Y, блеф> = - $^{1}/_{2}$ - $^{1}/_{2}$ c + 1 - c

<Y, блеф> = $^{1}/_{2}$ - $^{3}/_{2}$ c

<Y, чек> = 0

Составим из полученных выражений уравнение:

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{2}c = 0$$

$$c = \frac{1}{3}$$

Далее, определим частоту блефов с дамой от игрока Y, при которой игроку X будет все равно, делать колл с королями или нет. Здесь переменная «b» означает частоту, с которой игрок Y блефует с дамами.

$$\langle X, \text{колл}\rangle = (\text{проигрывает тузам}) + (\text{выигрывает у дам})$$

$$\langle X, \text{колл}\rangle = \frac{1}{2}\,(-l) + \frac{1}{2}\,[b(1)]$$

$$\langle X, \text{колл}\rangle = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}b$$

$$\langle X, \text{фолд}\rangle = \frac{1}{2}(b)\,(-2)$$

$$\langle X, \text{фолд}\rangle = -b$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}b = -b$$

$$b = \frac{1}{3}$$

Таким образом, мы получили пару оптимальных стратегий: игрок X должен отвечать в $\frac{1}{3}$ всех случаев, когда у него оказывается король, а игрок Y должен блефовать в $\frac{1}{3}$ случаев, когда у него на руках дамы.

Дайвате снова немного отвлечемся и постараемся осмыслить полученный результат. Главная идея для игрока Y заключается в том, чтобы получить вэлью со своей совокупностью рук. Говоря об эксплуатации, если бы игрок Y знал, как его оппонент поведет себя с королями, то он бы смог каждый раз делать правильный выбор между блефами и вэлью бетами. Однако давайте считать, что он этого не знает, и просто хочет получать максимальную выгоду вне зависимости от действий своего оппонента.

В этом случае у него есть два источника вэлью: украденные банки с дамами и выигранные ставки с тузами. Таким образом, в идеале игрок Y хотел бы сделать так, что прибыль от каждой из этих стратегий была равнозначной. И тогда игрок X не сможет его эксплуатировать. Для этого ему нужно блефовать с такой частотой, чтобы вэлью всей его стратегии не менялось вне зависимости от действий оппонента; в частности, оно не должно зависеть от того, делает оппонент колл с королями или нет. Как оказалось, в этом случае, правильное соотношение вэлью бетов с тузами к блефам с дамами составляет 3 к 1. Иными словами, игрок Y должен делать бет с $^1/_3$ своих дам, поскольку с тузами ставку он сделает всегда. Вспомним главу 11, где мы обозначили это соотношение блефов к ставкам на вэлью как «α», и показали, что оно равно «1/*(P*+ 1)» (см. формулу 11.1). Для банка размером в две ставки мы действительно получим соотношение $^1/_3$.

Примечание переводчика: Здесь может показаться, что автор подменил понятие «частота блефа с дамами» на «соотношение блефов и вэлью бетов», однако это не так. Дело в том, что из-за специфики игры значения этих показателей действительно равны одной трети. Так, мы уже посчитали, почему игрок Y должен ставить со своими дамами $^1/_3$ раз. Если же посмотреть на соотношение блефов и вэлью бетов, то становится очевидным следующее: вероятность получить туза и даму абсолютно одинакова, и это единственные руки, с которыми мы будем ставить. Значит, если мы рассмотрим, например, шесть событий, в которых мы можем делать вэлью бет, то в трех из них у нас будут дами, в трех – тузы. С тузами мы сделаем бет все три раза, а с дамами – всего один. Таким образом, соотношение блефов и вэлью бетов окажется 1 к 3.

Та же логика применима и для игрока X. Он хочет отвечать на ставку с такой частотой, чтобы его оппоненту не было разницы, блефовать с дамами или нет. Когда блеф игрока Y срабатывает, он получает две ставки, когда нет - он теряет всего одну. Таким образом, для достижения своей цели X обязан делать колл в два раза чаще, чем фолд. В этом случае правильно соотношение составляет $^2/_3$ (остальные $^1/_3$ рук сбрасываются). Однако в половине случаев, когда оппонент блефует, у игрока X будет туз. То есть ему нужно отвечать с дополнительной частью своих рук, равной $^2/_3$ - $^1/_2$, или $^1/_6$. Поскольку короли составляют $^1/_2$ его рук, когда у оппонента дама, то ему нужно отвечать с $^2/_6$ (или $^1/_3$) своих королей. Снова обращаемся к главе 11, где мы доказали, что игрок X должен делать фолд «α» раз с руками, которые могут побить блеф. Как не сложно догадаться, здесь он сбрасывает именно $^1/_3$ всех рук, способных побить блеф.

Очевидно, что игрок Y имеет положительное ожидание (или, как мы уже говорили в главе 11, положительное вэлью) в этой игре – он может сделать как чек (и получить нулевое вэлью), так и бет (и получить некое вэлью). Посчитаем общее вэлью от такой игры для игрока Y. Для этого нужно рассмотреть возможные стратегии и результаты для этого игрока. Конечно, мы могли бы рассчитать ожидание от каждого действия, однако есть куда более простой метод. Как мы уже показали выше, если каждый из игроков придерживается оптимальной стратегии, то игрок X безразличен к коллу – иными словами, для него между коллом и фолдом нет никакой разницы. Так что мы можем представить, что он всегда будет скидывать свои карты. Конечно, если бы игрок X на самом деле придерживался такой стратегии, его оппонент смог бы этим воспользоваться. Однако поскольку мы считаем вэлью игры, а не ищем оптимальную стратегию, мы можем просто сказать, что стратегия игрока Y останется неизменной.

Вэлью игры для игрока Y составит $^1/_{18}$ ставки. Мы призываем читателя проверить этот результат для всех возможных стратегий игрока X, если он делает колл с королями.

Таким образом, мы решили эту игру на половине улицы и нашли оптимальные стратегии для размера банка в две ставки. Однако мы можем использовать те же самые методы, чтобы решить такую игру для произвольного размера банка.

Давайте немного скорректируем условия – теперь размер банка в игре составляет P единиц. Полученная игра будет ничем не сложнее уже рассмотренной нами выше.

Пример 13.2 – игра AKQ #2

Игра на половине улицы.

Размер банка равен P единицам.

Ограничение на размер ставки – одна единица.

Как и в прошлый раз, мы можем составить полную платежную матрицу для такой игры:

	Игрок Y	**Туз**		**Король**		**Дама**	
Игрок X		Бет	Чек	Бет	Чек	Бет	Чек
Туз	Колл			-1	0	-1	0
	Фолд			+P	0	+P	0
Король	Колл	+1	0			-1	0
	Фолд	0	0			+P	0
Дама	Колл	+1	0	+1	0		
	Фолд	0	0	0	0		

Эта матрица может быть сокращена путем исключения доминируемых стратегий (как и в игре AKQ #1, пример 13.1):

	Игрок Y	**Туз**	**Дама**	
Игрок X		Бет	Бет	Чек
Туз	Колл		-1	0
Король	Колл	+1	-1	0
	Фолд	0	+P	0

Две формулы безразличия, в этом случае, будут выглядеть так (здесь «b» выражает частоту, с которой игрок Y блефует с дамами, а «c» - как часто игрок X делает колл с королями):

$$\langle Y, \text{блеф}\rangle = (\text{проигрывает тузам}) + (\text{проигрывает королям}) +$$
$$+ (\text{короли делают фолд, он выигрывает банк})$$

$$\langle Y, \text{блеф}\rangle = (\tfrac{1}{2})(-1) + (\tfrac{1}{2})(c)(-1) + (\tfrac{1}{2})(1 - c)(P)$$

$$\langle Y, \text{блеф}\rangle = \tfrac{1}{2}(-1) + \tfrac{1}{2}[c(-1) + (1 - c)(P)]$$

$$\langle Y, \text{блеф}\rangle = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}c + \tfrac{1}{2}P - \tfrac{1}{2}Pc$$

$$\langle Y, \text{чек}\rangle = 0$$

Приравняем эти два выражения, получим:

$$-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}c + \tfrac{1}{2}P - \tfrac{1}{2}Pc = 0$$

$$1 + c - P + Pc = 0$$

$$(P + 1)c = P - 1$$

$$c = (P - 1)/(P + 1)$$

Полученное выражение для «c» и является частотой колла с королями для игрока X. Когда же у игрока Y оказывается дама, у его оппонента в половине случаев окажется туз, а еще в половине – король. Поэтому общая доля рук (тузов и королей), с которыми он будет делать колл, составляет $\tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})(P - 1)/(P + 1)$. Это, в свою очередь, означает, что он должен делать фолд $1/(P + 1)$ раз (чтобы игрок Y был безразличен к блефу), что в точности равно уже известной нам константе «α».

Далее найдем частоту блефа с дамами для игрока Y:

<X, колл> = (проигрывает тузам) + (выигрывает у дам)

<X, колл> = $^1/_2$ (-1) + $^1/_2$ [b(1)]

<X, колл> = - $^1/_2$ + $^1/_2\, b$

<X, фолд>= $^1/_2\, (b)(-P)$

Составим новое уравнение:

$-\ ^1/_2 + {}^1/_2\, b = {}^1/_2\, (b)(-P)$

$-1 + b = -bP$

$b(1+P) = 1$

$b = 1/(1+P)$

$b = \alpha$

И вновь мы пришли к выводу, что отношение блефов к ставкам на вэлью должно быть равно «α».

Теперь мы можем рассчитать вэлью игры для игрока Y:

Руки игроков	Выгода для игрока Y	*p*(раздачи)	Взвешенное вэлью
(A, K)	0	$^1/_6$	0
(A, Q)	-1/(P+ 1)	$^1/_6$	- $^1/_6$ (*P*+1)
(K, A)	0	$^1/_6$	0
(K, Q)	+*P*/(*P*+ 1)	$^1/_6$	*P*/6(*P*+ l)
(Q, A)	0	$^1/_6$	0
(Q, K)	0	$^1/_6$	0
Сумма			**(*P*-1)/6(*P*+1)**

Таким образом, суммарное вэлью для игрока Y составляет (*P*-1)/6(*P*+1). С увеличением размера банка, вэлью игры приближается к $^1/_6$. Если банк будет очень большим, то игрок X просто станет отвечать со всеми своими королями, а игрок Y практически перестанет блефовать. В этой ситуации игрок Y получит ставку только если у него окажется туз, а у его оппонента – король. Вероятность такой раздачи составляет $^1/_6$.

В завершение стоит сделать одну ремарку – решение, приведенное выше, действительно только для банков размером больше 1. Причина заключается в том, что когда банк меньше 1, игрок Y всегда теряет деньги, блефуя с дамами – в этом случае игрок X просто будет делать колл с тузами, которые составляют половину его рук. Даже если игрок X будет скидывать всех своих королей и отдавать банк своему оппоненту, этого все равно будет недостаточно, что компенсировать потерю одной ставки при маленьком банке. Чем ближе размер банка к единице, тем больше становится соотношение «α». При банке в 2 единицы оно равно $^1/_3$, при банке в 1.5 - $^2/_5$, при 1.1 - $^{10}/_{21}$, и когда банк становится равным 1 единице, игрок Y перестает блефовать.

Мы можем проследить изменение вэлью игры для игрока Y на графике. Обратите внимание то, что происходит с линиями при *P* = 1: игрок Y переходит от полного отсутствия блефов к блефу с половиной своих рук. Причиной этому является тот факт, что колл превращается в смешанную стратегию, также как и блеф. Если банк меньше единицы, ни один игрок не будет ни блефовать, ни отвечать на ставки, однако такую стратегию невозможно эксплуатировать из-за частоты, с которой туз оказывается в диапазоне каждого игрока. Также вы можете заметить, что при больших размерах банка игрок X должен часто отвечать на ставку, в то время как игрок Y должен редко блефовать. Таким образом, увеличение размера банка выгодно игроку Y.

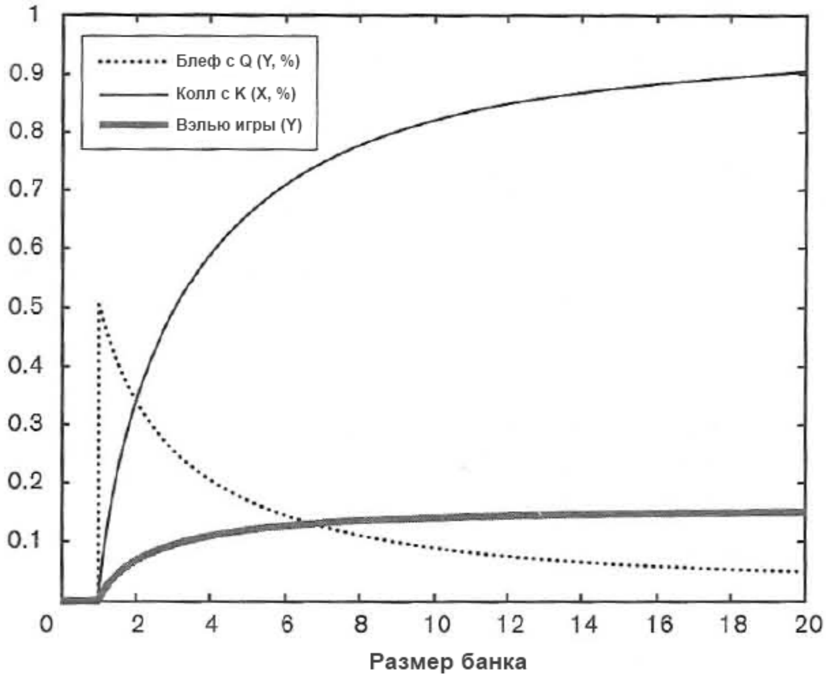

График 13.1. Оптимальные стратегии для лимитной игры AKQ

Какой вывод стоит сделать из этой главы? Изменение размера банка влияет на стратегии игроков и их ожидание. Также важно понять, что решение игр с банком произвольных размеров зачастую оказывается ничем не сложнее решения для банков фиксированного размера. В дальнейшем мы не станем искать решения для игр с определенным банком (если только этого не требует тема нашего обсуждения), и просто будем считать, что в каждой игре есть некий банк *P*.

Ключевые идеи

- Соотношения ставок на вэлью и блефов – это ключ к оптимальной игре, когда у обоих игроков есть руки с четко определенной силой (натсы, средние руки, воздух).

- В Лимитном покере практически никогда нельзя ставить на ривере руки, которые могут побить только блеф или получить колл от более сильной комбинации.

- Исключение карт может оказывать существенное влияние на диапазон оппонента.